



چندوجهی‌ها براساس گراف‌ها و مشخصه اویلر آن‌ها

امین تقی‌نژاد^{۱*}

۱- کارشناسی ارشد گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران

چکیده

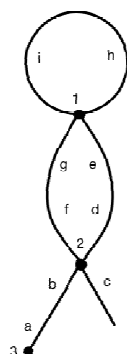
در این مقاله ابتدا عمل گراف‌های تعمیم‌یافته را همانند گراف‌های شبه_جهت‌دار تعریف می‌کنیم که در آن مجموعه‌ی یال‌ها به فرم یک عمل گراف جهت‌دار و به فرم مونودرومی گراف افراز شده است، سپس با معرفی یک جسم چندوجهی کایرل به تشریح خواص توپولوژیکی آن می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: عمل گراف، گراف جهت‌دار، مورفسم، چند وجهی، ناوردا، مشخصه اویلر

۱. مقدمه

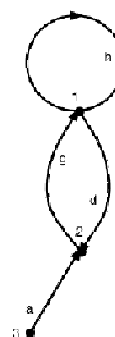
خارج قسمت عمل گراف با توجه به گروه اتومورفسم‌های خود (یا برخی زیرگروه‌هایش) گراف نوع متقارن نامیده می‌شود که به طور قابل توجهی در اتصالات همراه با تقارن‌های نگاشت و تقارن‌های حافظ‌جهت سودمند است. حال چطور می‌توانیم یک مکعب را توصیف‌اش کنیم و بگوییم که یک نگاشت مرتب و نگاشت جهت‌دار ناکایرل است. یکی کردن ساختارهای موجود در چنین روشی منجر به ایجاد چندوجهی‌های گوناگون با خواص مختلف می‌شود.

* Corresponding author : Amin Taghinejad
Email: math.taghinejad@gmail.com

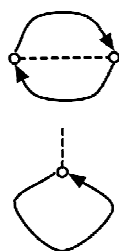


	a	b	c	d	e	f	g	h	i
r	b	a	c	e	d	g	f	i	h
i	3	2	2	2	1	2	1	1	1

گراف جهت‌دار Γ یک چهارتایی (V, A, j, t) است که V و A مجموعه‌های ناتهی جدا از هم می‌باشند. V مجموعه رئوس و A مجموعه آرک‌ها (یال). $j: A \rightarrow V$ نگاشتی است که به هر دارت، راس اولیه خودش را و $t: A \rightarrow V$ نگاشتی است که به هر دارت، راس انتهایی خود را اختصاص می‌دهد.



	a	d	g	h
j	3	1	2	1
t	2	2	1	1



گراف جزئا جهت‌دار یک چندتایی (V, D, A, i, r, j, t) است که (V, D, i, r) یک پیش-گراف و (V, A, j, t) یک گراف جهت‌دار است.

یک مورفیزم γ بین دو گراف جزئا جهت‌دار (V, D, A, i, r, j, t) و $(V', D', A', i', r', j', t')$ برای هر $a \in A$ و $d \in D$ در رابط زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned} i'(\gamma(d)) &= \gamma(i(d)) \\ r'(\gamma(d)) &= \gamma(r(d)) \\ j'(\gamma(a)) &= \gamma(j(a)) \\ t'(\gamma(a)) &= \gamma(t(a)) \end{aligned}$$



تعریف. فرض Φ یک مجموعه‌ی ناتهی متناهی از راس‌ها باشد. قرار می‌دهیم $\mathcal{R} = [R_1, R_2, \dots, R_m]$ که $m \geq 0$ مجموعه جایگشت‌های $\forall i \in I: R_i \in \text{Sym}(V)$, $I = \{1, 2, \dots, m\}$ که مجموعه دوران‌ها نامگذاری‌اش می‌کنند. فرض $e = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ مجموعه‌ی برگردانی از Φ باشد. $\forall j \in J: r_j \in \text{Sym}(V)$, $r_j^2 = Id$, $J = \{1, 2, \dots, m\}$ که مجموعه قرینه (بازتاب) می‌نامند. ساختار $\Gamma = (\Phi; \mathcal{R}; e, I, J)$ یک عمل گراف رو مجموعه راس Φ از نوع (I, J) با نشان (m, n) نامیده می‌شود. به مرجع [۱] مراجعه کنید.

تعریف. زیرگروه $Mon \Gamma = \langle \mathcal{R}; e \rangle \leq \text{Sym}(\Phi)$ ، گروه مونودرومی^۱ از Γ نامیده می‌شود. عناصر $Mon \Gamma$ روی مجموعه Φ از راست عمل می‌کنند که این تعریف قرارداد است.

عمل گراف Γ همبند است اگر $Mon \Gamma$ بطور متعدی رو مجموعه Φ عمل کند. مورفیسیم توسعه‌یافته $\varepsilon = (\hat{v}, \hat{i}, \hat{j}, K_1)$ ایزومورفیسیم است اگر و تنها اگر $\hat{v}, \hat{i}, \hat{j}$ دوسویی باشند. ایزومورفیسیم توسعه‌یافته عمل گراف به خودش یک اتومورفیسیم توسعه‌یافته است. یک گروه اتومورفیسیم‌های توسعه‌یافته $Aut_e \Gamma$ از عمل گراف، شامل تمام اتومورفیسیم‌های Γ است.

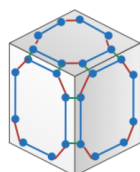
قضیه. فرض کنید Γ یک عمل گراف باشد آنگاه

$$Aut_o \Gamma \leq Aut_e \Gamma \leq Aut \Gamma$$

که در آن $Aut \Gamma$ گروه اتومورفیسیم‌ها از گراف زمینه^۲ Γ است.

مثال. فرض کنید Γ عمل گراف یک نگاشت جهت‌دار $\Gamma(V; R; r)$ باشد. مورفیسیم $\Gamma(V; R; r) \rightarrow \Gamma(V; R^{-1}; r)$ متناظر با یک ایزومورفیسیم جهت-معکوس است به عبارتی دیگر، عمل "گرفتن تصویر آینه" است.

تعریف. خارج قسمت $T(\Gamma) = \Gamma / Aut_o \Gamma$ یک عمل گراف است که گراف نوع متقارن نامیده می‌شود.



مثال. هر نگاشت منظم باعث ایجاد یک هندسه هم‌مجموعه^۳ می‌شود. گروه G توسط سه وارون $\langle r_0, r_1, r_2 \rangle$ تولید می‌شود و زیرگروه‌های متناظر با راس‌ها، یال‌ها و وجه‌ها به ترتیب توسط $\langle r_0, r_1 \rangle$ ، $\langle r_0, r_2 \rangle$ و $\langle r_1, r_2 \rangle$ تولید می‌شوند.

می‌توانیم مفهوم هندسه‌های هم‌مجموعه از گروه‌ها را به عمل گراف‌ها توسط گراف‌های کیلی^۴ تعمیم دهیم. فرض کنید $\Gamma(V; R; e)$ یک عمل گراف باشد و داشته باشیم $\sigma_i \subseteq e$ ($i = 1, 2, \dots, r$)، $S_i \subseteq R$ ، آنگاه $\Delta_i = (V; S_i; \sigma_i)$ عمل گراف (ناهمبند) است.

¹ monodromy group

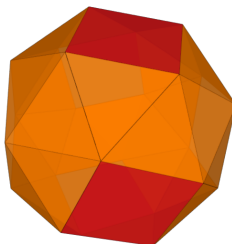
² گرافی بدون جهت که از قرار دادن یالی بدون جهت بجای هر یال جهت‌دار به دست می‌آید.

³ coset geometry

⁴ Cayley graph



$F_i(S_i, \sigma_i)$ را افزایی از مجموعه راس V به مولفه‌های همبند (Δ_i) تعریف می‌کنیم. افزای F_i متناظر است با مسیر $\langle S_i, \sigma_i \rangle$ روی V و مولفه‌های F_i وجه i ام $(\Gamma; \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r)$ نامیده می‌شوند. ساختار $(\Gamma; \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r)$ هندسه‌ی عمل با مرتبه r نامیده می‌شود. با استفاده از ایده‌ای مشابه در هندسه هم‌مجموعه، می‌توانیم هندسه وقوع مرتبه r را به هر هندسه عمل مرتبه r نسبت دهیم. برای توضیحات بیشتر رجوع شود به [۲] و [۳].



حال یک جسم چند وجهی کایرل که با راس متعددی است را در نظر بگیرید. [۴] مثلاً مکعب اسنوب که از دو فرم جهت‌دار می‌آید دارای ۳۸ وجه، ۶۰ یال و ۲۴ راس است. در ادامه نشان می‌دهیم که جسم چندوجهی تولید شده توسط عمل گراف‌ها با شرایطی خاص از نظر توپولوژیکی با چنبره T^2 یکسان است.

۲. ناورداهای توپولوژیکی

اساساً تعریف توپولوژی برای رده‌بندی کردن مجموعه‌ها بیان گردیده است. فرض کنیم که اشکال مختلفی داریم و می‌خواهیم ببینیم کدام یک از آن‌ها با هم معادل و کدام یک متفاوت هستند. از نظر توپولوژیکی دو شکل را معادل گوئیم اگر بتوانیم با یک تغییر شکل پیوسته آن‌ها را به یکدیگر تبدیل نمود. به عبارت دیگر اگر یک ورقه لاستیکی داشته باشیم و بدون آن که آن را پاره کنیم یا به هم بچسبانیم این ورقه را تغییر شکل داده و اشکال مختلفی بسازیم، آنگاه همه‌ی آن‌ها از نظر توپولوژیکی معادل هستند یا به عبارت دقیق‌تر این اشکال با یکدیگر هم‌مورف هستند لذا پایاهای (ناوردا) توپولوژیکی^۵ آن مقادیری هستند که تحت تاثیر هم‌مورفیسم‌ها تغییر نمی‌کنند. یک پایای توپولوژیکی می‌تواند یک عدد باشد، مانند تعداد مولفه‌های همبندی یک فضا، یا یک ساختار جبری باشد که روی آن فضا گذاشته شده است. یا بالاخره یک پایای توپولوژیکی می‌تواند تعاریفی در توپولوژی مانند همبندی، فشردگی و غیره باشد. نتیجه‌ی مهمی که از پایاهای توپولوژیکی حاصل می‌شود آن است که اگر دو فضای توپولوژیکی، پایاهای توپولوژیکی متفاوت داشته باشند نمی‌توانند با یکدیگر هم‌مورف باشند. به عنوان مثال دایره نمی‌تواند با محور اعداد حقیقی هم‌مورف باشد زیرا دایره در صفحه $\mathbb{R}^2$ فشرده است در حالی که محور $\mathbb{R}$ فشرده نیست. دایره حتی با فاصله بسته $[-1, 1]$ هم نیز نمی‌تواند هم‌مورف باشد، اگرچه هر دو فشرده هستند. زیرا فاصله‌ی بسته $[-1, 1]$ همبند ساده است در حالی که S^1 همبند ساده نیست. جالب است که یادآوری کنیم که فاصله باز $(-1, 1)$ با محور $\mathbb{R}$ هم‌مورف است. زیرا هر فاصله باز را می‌توان مانند یک قطعه کش، امتداد داد. پایای جالب دیگری که جنبه عددی دارد، مشخصه اویلر است که در اینجا به شرح آن می‌پردازیم.

۳. مشخصه اویلر در $\mathbb{R}^3$

مشخصه اویلر یکی از جالب‌ترین پایاهای توپولوژیکی است که برای رده‌بندی کردن فضاهای توپولوژیک از آن استفاده می‌شود. برای معرفی این مشخصه یک چندوجهی در $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم، منظور ما از چندوجهی یک شی هندسی است که به وسیله‌ی چند وجه^۶ محصور شده است. مانند یک چندوجهی محدب. مرز هر دو وجه را یک یال^۷ می‌نامیم، مرز هر دو یال یکدیگر را در نقطه‌ای به نام راس^۸ قطع می‌کنند. برای چند ضلعی‌های مسطح، مرز چند ضلعی را خط و مرز خطوط

^۵ topologic invariants

^۶ face

^۷ edge

^۸ vertex



را نقطه می‌نامیم، در یک چندوجهی، وجه‌ها، یال‌ها و رئوس را سادک^۹ می‌نامیم. توجه کنید که مرز دو سادک یا تهی است یا سادک دیگری است. به عنوان مثال مرز دو وجه یک یال است که خود نیز یک سادک است، تعریف رسمی سادک در ابعاد بالاتر را در ادامه می‌آوریم.

تعریف. فرض کنیم K یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^3$ باشد که با چند وجهی N هم‌مورف است. مشخصه اویلر^{۱۰} مجموعه K را با $\chi(K)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\chi(K) = N_f - N_e + N_v$$

در آن N_f ، N_e و N_v به ترتیب تعداد وجه‌ها، یال‌ها و رئوس چندوجهی N هستند.

مثال. مشخصه اویلر یک مجموعه تک‌عضوی برابر عدد $\chi = 0 - 0 + 1 = 1$ است. زیرا بنا بر تعریف $N_f = N_e = 0$ و $N_v = 1$. می‌دانیم که دایره S^1 با مثلث (توخالی) هم‌مورف است لذا مشخصه اویلر S^1 برابر است با $\chi(S^1) = 0 - 3 + 3 = 0$.

اولین سوالی که در ذهن ما ایجاد می‌شود آن است که آیا این کمیت خوشتعریف است؟ به این معنی که آیا $\chi(K)$ بستگی به انتخاب چند وجهی N دارد یا خیر. ابتدا با یک مثال این موضوع را بررسی می‌کنیم. کره S^2 می‌تواند با یک مکعب هم‌مورف باشد. لذا مشخصه اویلر آن برابر است با $\chi(S^2) = 6 - 12 + 8 = 2$. از طرف دیگر S^2 می‌تواند با یک هرم نیز هم‌مورف باشد. لذا در این صورت نیز مشخصه اویلر آن برابر است با $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$. اما خوشتعریفی مشخصه اویلر توسط پوانکاره به اثبات رسیده است.

قضیه پوانکاره. مشخصه اویلر یک مجموعه بستگی به انتخاب چندوجهی هم‌مورف با آن ندارد.

مثال. مشخصه اویلر یک مستطیل (توپر) برابر عدد $\chi = 1 - 4 + 4 = 1$ است. در استوانه مشخصه اویلر برابر صفر است. زیرا استوانه با یک چهاروجهی که از چهار مستطیل تشکیل شده است، هم‌مورف است. $\chi = 4 - 12 + 8 = 0$.

مثال. در چنبره T^2 مشخصه اویلر $\chi(T^2)$ برابر صفر است. زیرا T^2 با یک ۱۶ وجهی هم‌مورف است.

$$\chi(T^2) = 16 - 32 + 16 = 0$$

از قضیه پوانکاره نتیجه می‌شود که اگر دو مجموعه با یکدیگر هم‌مورف باشند مشخصه اویلر آنها باهم برابر است. عکس نقیض این قضیه که اصلی‌ترین کاربرد مشخصه اویلر است کاربردهای فراوانی در تشخیص خواص هندسی و توپولوژیکی مجموعه‌ها دارد.

قضیه. اگر دو مجموعه دارای مشخصه اویلر متفاوت باشند، نمی‌توانند با یکدیگر هم‌مورف باشند.

مثال. خط با دایره S^1 هم‌مورف نیست. زیرا مشخصه اویلر خط برابر $\chi = 0 - 1 + 2 = 1$ است. در حالی که چون دایره با مثلث (توخالی) هم‌مورف است، مشخصه اویلر S^1 برابر است با $\chi(S^1) = 0 - 3 + 3 = 0$. همچنین کره S^2 با چنبره T^2 هم‌مورف نیست.

باید توجه داشت که تساوی عدد اویلر در دو مجموعه، هم‌مورف بودن آن دو مجموعه را نتیجه نمی‌دهد.

⁹ simplex

¹⁰ Euler characteristic



مثال. خط با نقطه هم‌تومورف نیست. اگرچه مشخصه اویلر برابر دارند. در حقیقت مشخصه اویلر نقطه برابر $\chi = 0 - 0 + 1 = 1$ است، در حالی که مشخصه اویلر خط برابر $\chi = 0 - 1 + 2 = 1$ است. برای اطلاعات بیشتر در مورد تعریف مشخصه اویلر در ابعاد بالاتر می‌توانید به مراجع [۵] صفحه ۱۶۷، [۶] جلد اول و [۷] صفحه ۶۶ مراجعه کنید.

۴. قدردانی

از تمامی کسانی که حق معلمی به گردن حقیر را دارند، تشکر می‌نمایم.

۵. مراجع

- [1] Malnič, Aleksander. "Action graphs and coverings." *Discrete mathematics* 244.1-3 (2002): 299-322.
- [2] Connelly, R., Weiss, A. I., & Whiteley, W. (Eds.). (2014). *Rigidity and Symmetry* (Vol. 70). Springer.
- [3] Babai, László. (1979). Spectra of Cayley graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(2), 180-189
- [4] Schulte, Egon. "Chiral polyhedra in ordinary space, I." *Discrete & Computational Geometry* 32.1 (2004)
- [5] Lee, John M. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer Science & Business Media, 1997.
- [6] Nakahara, M. "Geometry, topology and physics, edition." *Graduate Student Series in Physics*, IOP, UK (2003).
- [7] Spivak, Michael D. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Publish or perish, 1970.